

THESIS / THÈSE

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES À FINALITÉ APPROFONDIE

Etude unidimensionnelle des approximations de l'opérateur de Koopman

Bauwens, Nicolas

Award date:
2021

Awarding institution:
Université de Namur

[Link to publication](#)

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



UNIVERSITÉ DE NAMUR

Faculté des Sciences

Etude unidimensionnelle des approximations de l'opérateur de Koopman

Mémoire présenté pour l'obtention
du grade académique de master en Sciences Mathématiques, à
finalité approfondie

Nicolas BAUWENS

Promoteur
Pr. Alexandre Mauroy

25 mai 2021

Remerciements

Tout d'abord, je tenais à remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou le loin à mon parcours académique. Autant les professeurs que j'ai pu côtoyer que les étudiants. Ils ont tous contribué à m'apporter les connaissances et les dispositions mathématiques dont je dispose aujourd'hui.

Ensuite, je tenais à remercier tout particulièrement ma famille et mes amis proches. En effet, cette année toute particulière, nous a permis de nous rendre compte de l'importance d'être bien entourés. Dès lors, à toutes les personnes qui m'ont soutenues durant cette année, j'aimerais adresser un chaleureux remerciement.

Enfin, j'aimerais remercier tout particulièrement mon promoteur, A. Mauroy, pour toute sa disponibilité et son aide dans la rédaction de ce travail.

Résumé

Au cours des dernières années, une approche reposant sur le formalisme de l'opérateur de Koopman connaît un succès grandissant en théorie du contrôle non linéaire. La description classique des systèmes en termes de trajectoires y est délaissée au profit d'une description fonctionnelle transformant un système non linéaire en un système linéaire de dimension infinie. Le succès de cette approche réside dans le fait qu'elle permet d'appliquer des techniques linéaires sur des problèmes de contrôle non linéaire. Par ailleurs, elle conduit à des techniques basées sur les données actuellement attendues en théorie du contrôle. Cependant, les méthodes développées dans ce contexte sont entachées d'erreurs d'approximation et ne sont généralement pas validées d'un point de vue théorique. Ce mémoire a pour but d'obtenir des bornes sur les erreurs d'approximation en dimension finie de l'opérateur de Koopman.

Abstract

Recent years have witnessed an increasing attention to the Koopman operator approach in nonlinear control theory. A key idea is to dispense with the traditional trajectory-oriented system description and adopt a global functional description turning nonlinear systems into linear (but infinite-dimensional) ones. This approach therefore allows to apply linear-algebraic methods to nonlinear control in a systematic way. Moreover, it lends itself to data-driven techniques that are anticipated in nonlinear control theory. However, the recently proposed control methods relying on the Koopman operator formalism are inherently vitiated by unknown finite-dimensional approximation errors and are usually not supported by any rigorous validation. This thesis aim to obtain bounds on the error of the finite dimensional approximation of the Koopman operator.

Table des matières

1	Introduction	7
2	Notions théoriques du travail	9
2.1	Opérateur de Koopman	9
2.1.1	Définition de l'opérateur	9
2.1.2	Propriétés de l'opérateur	11
2.2	Théorie de l'approximation	16
2.2.1	Développement de la théorie	16
2.2.2	Théorème de Deny-Lions	20
3	Résultats sur l'opérateur de Koopman	21
3.1	Espace d'approximation	21
3.2	Théorème de Deny-Lions	21
3.2.1	Cas simplifié	22
3.2.2	Cas général	22
3.2.3	Exemple : la logistique	23
3.3	Recherche d'une borne ponctuelle	27
3.3.1	Normes de polynômes	27
3.3.2	Espaces d'Hilbert à noyau reproduisant	29
3.3.3	Borne sur la fonctionnelle d'évaluation	29
3.4	Condition sur le flot	30
3.4.1	Cas de la logistique	33
4	Un autre type de projection : Les polynômes de Bernstein	35
4.1	Approximation sur des polynômes de Bernstein	35
4.1.1	Polynômes de Bernstein	35
4.2	Application à l'opérateur de Koopman	38
4.3	Application à la logistique	39
4.4	Comparaison avec la borne précédente	39
5	Conclusion	41

Chapitre 1

Introduction

L'étude des systèmes dynamiques est un domaine de recherche très actif ces dernières années. En effet, elle permet l'étude de la pandémie actuelle par exemple. On peut citer de nombreux autres domaines d'application comme l'ingénierie, l'étude de réseaux, l'étude de population... La modélisation de dynamiques de systèmes linéaires est un domaine qui est étudié depuis bien longtemps. Le but des recherches actuelles est d'arriver à analyser des dynamiques non linéaires. Dans ce cadre, l'opérateur de Koopman, qui est le sujet de ce mémoire, est un domaine d'intérêt.

En effet, nous allons montrer que l'opérateur permet de linéariser des dynamiques non linéaires. Cela a des applications très intéressantes en contrôle par exemple. On peut en effet utiliser cet opérateur pour décrire les futurs états sur base d'un système linéaire. Cela permet d'utiliser les techniques de contrôle linéaires sur un système qui ne l'est pas. Toutefois, le coût d'une telle linéarisation est le passage de l'étude du système en dimension infinie. Dès lors, comme les méthodes numériques ne permettent que d'utiliser des opérateurs linéaires de dimension finie, on doit recourir à des approximations de cet opérateur sur des sous-espaces. Dans ce contexte, l'objectif de ce mémoire est de borner ces erreurs d'approximations de façon à avoir une idée de la précision des méthodes utilisées. Des questions évidentes se posent comme

- Quelle norme choisir pour calculer l'erreur ?
- Quel espace fonctionnel d'observables choisir pour définir l'opérateur ?
- Dans quel sous-espace effectuer la projection ?
- Quel type de projections effectuer ?

Le but de ce mémoire est donc d'apporter quelques lumières sur ces différentes questions.

Le mémoire va se concentrer sur ce qu'on appelle la théorie de l'approximation. En effet, cette théorie présente des résultats intéressants dans d'autres domaines et nous appliquerons donc cette théorie au cas de la théorie de l'opérateur Koopman. Nous étudierons deux types de projections. Dans un premier temps, une projection L_2 et dans un second temps, une projection sur des polynômes de Bernstein. Le mémoire constituera donc à appliquer les résultats connus à l'opérateur de Koopman. L'objectif sera alors de travailler sur ces bornes afin qu'elles soient le plus pratique possible à utiliser. Dans ce mémoire, nous nous concentrons sur le cas de fonctions en une dimension. La généralisation des résultats en dimension quelconque peut être envisagée.

Chapitre 2

Notions théoriques du travail

Dans ce premier chapitre, nous allons commencer par préciser les diverses notions et notations qui seront utilisées au fur et à mesure du mémoire. Ce chapitre sera divisé en deux sections principales : l'opérateur de Koopman et la théorie de l'approximation. L'opérateur de Koopman dans un premier temps puisqu'il s'agit du sujet d'étude de ce mémoire. La théorie de l'approximation, car il s'agit de la principale théorie sur laquelle nous allons baser nos résultats.

2.1 Opérateur de Koopman

Dans cette section, nous allons introduire l'opérateur de Koopman. Une fois cela effectué, nous développerons la théorie de l'approximation qui sera utilisée dans le mémoire. Dans un premier temps, nous rappellerons donc le contexte dans lequel prend place l'opérateur de Koopman. Ensuite, nous étudierons certaines des propriétés qui seront utiles dans le mémoire. Enfin, nous motiverons l'utilisation de cet opérateur et préciserons l'objectif du mémoire.

2.1.1 Définition de l'opérateur

Dans cette section, nous allons définir l'opérateur ainsi que toutes les notations qui seront utilisées au fur et à mesure du mémoire. Nous présenterons ensuite le problème en temps discret ainsi qu'en temps continu.

2.1.1.1 Définition en temps discret

En temps discret, une dynamique non-linéaire se modélise de la façon suivante

$$x(k+1) = S(x(k)),$$

où k est un naturel, x est un vecteur de \mathbb{R}^n et S une fonction quelconque de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . L'ensemble des orbites du système est donc $\{S^k(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, k = 0, \dots, \infty\}$. L'opérateur de Koopman est alors défini par

$$\begin{aligned} U : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longmapsto Uf = f \circ S, \end{aligned}$$

où \mathcal{F} est l'espace vectoriel des observables. Cet espace peut être un espace de Banach ou de Hilbert. Dans ce cas, l'opérateur de Koopman a simplement pour effet de regarder l'évolution

d'une fonction f arbitraire après une unité de temps.

Prenons un exemple simple afin d'illustrer ceci. Soit la dynamique déterminée par

$$S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto S(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_2^2 \\ \cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

Soit $f \in \mathcal{F}$, l'opérateur de Koopman est donné $\forall x \in \mathbb{R}^3$ par

$$(Uf)(x) = (Uf) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ x_2^2 \\ \cos(x_1) \end{pmatrix}.$$

2.1.1.2 Définition en temps continu

Commençons d'abord par rappeler le problème en temps continu. On cherche à étudier un problème de la forme

$$\dot{x} = F(x),$$

où x est un vecteur de \mathbb{R}^n et F une fonction Lipschitz-continue de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n . Le vecteur x est appelé vecteur d'état. Des hypothèses sur la fonction F seront parfois nécessaires pour certains résultats. Nous savons que tout système dynamique en temps continu induit un flot. Celui-ci est défini de la manière suivante : $\forall t \geq 0$

$$\phi^t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \phi^t(x) = x(t).$$

Ce flot nous permet de définir l'opérateur de Koopman, ou plus précisément le semi-groupe d'opérateurs de Koopman. Nous avons $\forall t \geq 0$

$$U^t : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$f \longmapsto U^t f = f \circ \phi^t,$$

où \mathcal{F} est l'espace vectoriel des observables. L'opérateur de Koopman permet ici de voir l'évolution de la dynamique après t unités de temps au travers d'une observable.

Prenons un exemple simple pour illustrer ceci. Soit le système dynamique suivant

$$\dot{x} = x^2,$$

où $x \in \mathbb{R}$. On trouve de manière assez directe le flot donné par

$$\phi^t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \phi^t(x) = \frac{-x}{tx - 1}.$$

Dès lors, $\forall t \geq 0, \forall f \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathbb{R}$

$$(U^t f)(x) = f \left(\frac{-x}{tx - 1} \right).$$

Par souci de clarté, nous considérerons dans la suite uniquement le cas d'un système en temps continu. Les résultats se généralisent évidemment en temps discret. Le lecteur peut consulter [12] pour avoir des informations plus détaillées.

2.1.1.2.1 Générateur infinitésimal Dans le cadre de la théorie des semi-groupes, une notion très importante est celle de générateur infinitésimal. Cette notion est bien définie dans le cas des semigroupes fortement continu. Dans notre cas, ce dernier se définit de la façon suivante

$$A : D(A) \subseteq \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$$

$$f \longmapsto Af = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(U^t f - f)}{t},$$

où $D(A) = \{f \in \mathcal{F} \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(U^t f - f) \in \mathcal{F}\}$. La limite de cette définition se fait au sens fort, c'est à dire

$$Af = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\|(U^t f) - f\|_{\mathcal{F}}}{t}.$$

Intuitivement, il généralise donc l'idée de dérivée par rapport au temps. Pour l'opérateur de Koopman, le générateur infinitésimal est de la forme $A = F \cdot \nabla$, où \cdot représente le produit interne et ∇ l'opérateur gradient.

2.1.1.3 Cas du dual

Avant de rentrer plus en détail dans les propriétés de l'opérateur qui nous seront utiles dans le cadre de ce mémoire, nous allons brièvement présenter l'opérateur dual de l'opérateur de Koopman. Soit $t \geq 0$ et soit U^t l'opérateur de Koopman associé à une dynamique. Le dual de U^t , noté $(U^t)^*$, se définit de la façon suivante

$$(U^t)^* : \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{F}^*$$

$$\zeta \longmapsto (U^t)^* \zeta = \zeta \circ U^t,$$

où $\mathcal{F}^* = \{\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C} \mid \zeta \text{ est linéaire borné}\}$.

Supposons que \mathcal{F} est un ensemble de fonctions continues à support compait. Alors, vu le théorème de Riesz [10], toutes les fonctionnelles linéaires bornées peuvent être associées à une mesure. Dès lors, grâce au théorème de Radon-Nickodym, on sait que cette mesure, pour autant qu'elle soit absolument continue, peut être associée à une densité. On peut dans ce cas écrire

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \mathcal{F}^* \quad \forall f \in \mathcal{F} & \quad \zeta(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \rho(x) dx \\ \Rightarrow \forall \zeta \in \mathcal{F}^* \quad \forall f \in \mathcal{F} & \quad \zeta(U^t f) = \int_{\mathbb{R}^n} U^t f(x) \rho(x) dx \\ \text{Or, } \forall \zeta \in \mathcal{F}^* \quad \forall f \in \mathcal{F} & \quad (U^t)^* \zeta(f) = \zeta(U^t f) \\ \Rightarrow \forall \zeta \in \mathcal{F}^* \quad \forall f \in \mathcal{F} & \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) P \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} U^t f(x) \rho(x) dx, \end{aligned}$$

où P est l'opérateur de Perron-Frobenius. Nous retrouvons bien la dualité entre les deux opérateurs et nous pouvons remarquer que, tandis que l'opérateur de Koopman agit sur des observables, celui de Perron-Frobenius agit sur les densités.

2.1.2 Propriétés de l'opérateur

Dans cette section, nous allons principalement nous intéresser à des propriétés de l'opérateur de Koopman qui pourraient nous servir lors de ce mémoire. La première propriété

intéressante de l'opérateur est bien entendu sa linéarité. En effet, soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ et soit $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, on a

$$\begin{aligned} U^t(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \circ \phi^t \\ &= \alpha_1 f_1 \circ \phi^t + \alpha_2 f_2 \circ \phi^t \\ &= \alpha_1 U^t f_1 + \alpha_2 U^t f_2. \end{aligned}$$

On peut aussi montrer que l'opérateur de Koopman est un opérateur de contraction pour la norme infinie. On a $\forall f \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \|U^t f\|_\infty &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |U^t f(x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(\phi^t(x))| \\ &= \sup_{x \in \phi^t(\mathbb{R}^n)} |f(x)| \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \\ &= \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

2.1.2.1 Représentation de l'opérateur sur un sous-espace de dimension finie

Dans cette partie, nous allons projeter l'opérateur de Koopman U^t sur un sous-espace de dimension K noté \mathcal{F}_K . La base de ce sous-espace est $\{\psi_j\}_{j=1}^K$. On définit l'opérateur de projection

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}_K \\ f &\longmapsto \Pi f. \end{aligned}$$

Grâce à l'opérateur de projection nous pouvons définir $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} U_K^t : \mathcal{F}_K &\longrightarrow \mathcal{F}_K \\ f &\longmapsto U_K^t f = \Pi U^t f. \end{aligned}$$

L'opérateur U_K^t est donc l'approximation de U^t dans le sous-espace \mathcal{F}_K . Nous allons maintenant essayer de représenter cet opérateur sous forme matricielle afin de pouvoir facilement l'utiliser numériquement. Pour cela, il est nécessaire de décomposer l'opérateur de projection sous la forme $\Pi = \Psi' \Gamma$, où

$$\begin{aligned} \Psi' : \mathbb{C}^K &\longrightarrow \mathcal{F}_K \\ a &\longmapsto \Psi' a = (\psi_1, \dots, \psi_K) a \\ \Gamma : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{C}^K \\ f &\longmapsto \Gamma f, \end{aligned}$$

où Γf donne les coordonnées de la projection Πf dans la base des $\{\psi_j\}_{j=1}^K$. De là, on peut donc écrire $\forall f \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} U_K^t \Pi f &= \Pi U^t \Pi f \\ &= \Psi' \Gamma U^t \Psi' \Gamma f \\ &= \Psi' \mathcal{U} \Gamma f, \end{aligned}$$

avec $\mathcal{U} = \Gamma U^t \Psi'$. \mathcal{U} est appelée la matrice de Koopman et représente l'action de U^t sur \mathcal{F}_K dans les coordonnées de la base $\{\psi_j\}_{j=1}^K$. Pour pouvoir la calculer facilement, on peut écrire $\forall f \in \mathcal{F}_K$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\Gamma f &= \Gamma U^t \Psi' \Gamma f \\ &= \Gamma U^t \Pi f \\ &= \Gamma U^t f.\end{aligned}$$

D'où, avec $f = \psi_j$, $\mathcal{U}e_j = \Gamma U^t \psi_j$, où e_j est le j ème vecteur unitaire. Cela signifie que la j ème colonne de \mathcal{U} contient les coordonnées de $U^t \psi_j$ dans la base $\{\psi_j\}_{j=1}^K$.

2.1.2.2 Présentation d'une méthode d'approximation de l'opérateur

Maintenant que nous avons présenté de manière analytique la projection de l'opérateur de Koopman, nous allons présenter une méthode qui permet de calculer ce dernier numériquement.

La méthode que nous allons présenter ici est une méthode assez intuitive nommée décomposition en modes dynamiques étendus (EDMD). Une étude plus approfondie de cette méthode est disponible dans [16]. Pour comprendre l'idée de cet algorithme, il suffit de se rappeler que \mathcal{U} approxime une transition d'état. Nous allons donc considérer un ensemble d'état initial $\{x_k\}_{k=1}^M$ et l'ensemble d'états finals correspondants $\{y_k\}_{k=1}^M$. Nous avons donc $\phi^t(x_k) = y_k$, $k = 1, \dots, M$. La méthode EDMD consiste ensuite à résoudre un problème de régression linéaire. En effet, nous essayons de trouver \mathcal{U} tel que

$$\forall f \in \mathcal{F}_K \quad \Gamma U^t f = \mathcal{U}\Gamma f + r,$$

où r est le résidu à minimiser qui provient du fait que l'espace \mathcal{F}_K n'est pas forcément invariant sous l'action de U^t . Dans notre cas, nous pouvons définir $\Gamma U^t f = \Psi_y$ et $\Gamma f = \Psi_x$. Cela correspond à définir

$$\begin{aligned}\Psi_x &= \begin{pmatrix} \psi_1(x_1) & \psi_2(x_1) & \dots & \psi_K(x_1) \\ \psi_1(x_2) & \psi_2(x_2) & \dots & \psi_K(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(x_M) & \psi_2(x_M) & \dots & \psi_K(x_M) \end{pmatrix}, \\ \Psi_y &= \begin{pmatrix} \psi_1(y_1) & \psi_2(y_1) & \dots & \psi_K(y_1) \\ \psi_1(y_2) & \psi_2(y_2) & \dots & \psi_K(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(y_M) & \psi_2(y_M) & \dots & \psi_K(y_M) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La résolution au sens des moindres carrés donne comme solution

$$\mathcal{U} = \Psi_x^+ \Psi_y,$$

où l'exposant $+$ indique qu'il s'agit de la pseudo-inverse.

2.1.2.3 Application à un exemple

Maintenant que nous connaissons l'opérateur de Koopman et avons présenté une méthode de projection de ce dernier, nous pouvons appliquer ces résultats sur un exemple afin de

faciliter la compréhension. Dans cet exemple, nous allons analyser l'erreur commise sur une dynamique simple : la logistique.

La dynamique de la logistique est donnée par

$$\dot{x} = rx(1 - x),$$

avec $x \in [0, 1]$ et $r > 0$. Calculons d'abord le flot de ce système. Pour cela, il est nécessaire de résoudre l'équation différentielle. On trouve

$$\begin{aligned} \int dt &= \int \frac{dx}{rx(1-x)} \\ \Leftrightarrow rt + C &= \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1-x} \\ &= \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \\ \Rightarrow \frac{x}{1-x} &= C_2 e^{rt}, \end{aligned}$$

où C est une constante et $C_2 = e^C$. En isolant x , on trouve le flot défini de la manière suivante $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \phi^t : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \phi^t(x) = \frac{\frac{x}{1-x}e^{rt}}{1 + \frac{x}{1-x}e^{rt}}. \end{aligned}$$

On trouve donc l'opérateur de Koopman défini de la manière suivante $\forall t \geq 0$

$$\begin{aligned} U^t : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ f &\longmapsto U^t f = f \circ \phi^t. \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'approximation de U^1 . Pour cela, nous devons tout d'abord choisir arbitrairement le paramètre logistique. Dans cet exemple, nous avons fixé ce paramètre r à 3. Ensuite pour l'exemple, nous allons choisir comme base $\{1, x, x^2\}$. On choisit l'ensemble des états initiaux $\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$. On obtient les états finaux correspondants $\{0.83, 0.93, 0.97, 0.99\}$. On trouve donc

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.04 \\ 1 & 0.4 & 0.16 \\ 1 & 0.6 & 0.36 \\ 1 & 0.8 & 0.64 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 1 & 0.83 & 0.69 \\ 1 & 0.93 & 0.86 \\ 1 & 0.97 & 0.94 \\ 1 & 0.99 & 0.98 \end{pmatrix}.$$

Cela donne

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.70 & 0.47 \\ 0 & 0.76 & 1.29 \\ 0 & -0.50 & -0.81 \end{pmatrix}.$$

Maintenant que nous connaissons l'opérateur et son approximation, on peut regarder si l'approximation correspond bien.

Prenons comme fonction à analyser une fonction qui fait partie du sous-espace considéré. Nous allons choisir

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f(x) = x, \end{aligned}$$

c'est à dire la fonction identité. Nous allons dans un premier regarder la vraie évolution de la fonction et, dans un second temps, l'évolution prédite avec notre approximation.

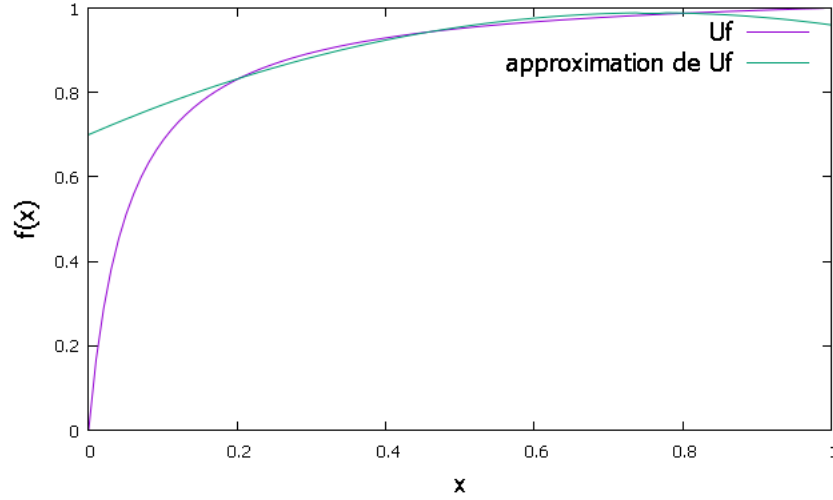


FIGURE 2.1 – Représentation de l'image de la fonction identité par U^1 et par son approximation U_3^1 .

- La valeur exacte de f est donnée par l'opérateur de Koopman que nous avons calculé précédemment. Nous trouvons $\forall x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} U^1 f(x) &= f(\phi^1(x)) \\ &= \frac{\frac{x}{1-x} e^3}{1 + \frac{x}{1-x} e^3}. \end{aligned}$$

- Regardons maintenant la valeur de cette fonction grâce à notre approximation. On trouve d'abord la projection de f sur l'espace engendré par $\{1, x, x^2\}$. C'est à dire,

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc

$$\mathcal{U}f = \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.76 \\ -0.50 \end{pmatrix}.$$

Nous avons représenté la fonction et son approximation à la figure 2.1. Sur cette figure, on observe que l'approximation a l'air plutôt bonne surtout sur la fin du domaine. On peut dire qu'il s'agit d'une bonne approximation. Toutefois, pour nous en assurer nous pouvons calculer la norme de la différence entre ces fonctions. On trouve les valeurs suivantes pour différentes normes

$$\begin{aligned} \|U^1 \text{Id} - U_3^1 \text{Id}\|_\infty &= 0.70, \\ \|U^1 \text{Id} - U_3^1 \text{Id}\|_1 &= 0.90, \\ \|U^1 \text{Id} - U_3^1 \text{Id}\|_2 &= 0.88. \end{aligned}$$

Il est évident que le nombre de conditions initiales peut être augmenté pour avoir une projection qui se rapproche plus d'une vraie projection L_2 . Nous avons fait le choix dans cet exemple d'en prendre peu pour que l'exemple soit plus visuel.

2.1.2.4 L'opérateur de Koopman en contrôle

Dans cette section, nous allons revenir plus précisément sur une application concrète de l'opérateur de Koopman. En effet, maintenant que toutes les définitions sont acquises, il est nécessaire de préciser un exemple de son utilisation en contrôle. Nous pouvons par exemple nous intéresser à une application de [9]. Dans cet article, l'objectif est de construire un prédicteur pour une dynamique non-linéaire. Nous appelons ici prédicteur, un système qui permet de connaître la sortie d'un système non linéaire à partir de ses entrées. Dans l'article, les auteurs commencent par présenter un prédicteur dans le cadre d'un système linéaire. Ensuite, ils appliquent ce prédicteur non pas à la dynamique du système directement mais à la dynamique après utilisation de l'opérateur de Koopman. De cette manière, la méthode de prédiction reste valable et nous pouvons construire un prédicteur dans le cadre d'une dynamique non-linéaire.

2.2 Théorie de l'approximation

Dans cette section, nous allons présenter la théorie de l'approximation. Nous aborderons les points essentiels du sujet. Toutefois, une description plus complète de celui-ci est disponible dans [6]. La théorie de l'approximation a pour but de classer différentes fonctions à approximer en fonction du taux de convergence de leur erreur. Nous commencerons par détailler cette méthode avant d'essayer de voir l'apport qu'elle peut avoir dans le cas qui nous intéresse : l'approximation de l'opérateur de Koopman.

2.2.1 Développement de la théorie

Dans cette première section, nous allons revenir sur les principes fondamentaux de la théorie de l'approximation. Pour cela, nous allons d'abord introduire les notations utilisées dans ce chapitre et expliquer l'objectif de la théorie. Ensuite, nous allons présenter deux types d'espaces qui sont utilisés dans ce cadre et les mettre en lien grâce aux inégalités de Jackson et Bernstein.

2.2.1.1 Cadre de travail

Dans cette section, nous présenterons le cadre dans lequel prend place la théorie de l'approximation. Soit l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$, et les sous-espaces d'approximation $X_n \subset X$ $n \geq 0$. On appelle $f \in X$, la fonction objectif que nous allons essayer d'approximer. L'erreur d'approximation est définie assez naturellement comme

$$E_n(f)_X = \text{dist}(f, X_n) = \inf_{g \in X_n} \|f - g\|_X.$$

La question à laquelle tente de répondre la théorie de l'approximation est : peut-on caractériser l'ensemble des fonctions f tel que $E_n(f) < Mn^{-\alpha}$, où $M, \alpha > 0$? C'est cette propriété qui va définir des espaces d'approximation qu'il suffira ensuite de caractériser.

Pour plus de clarté, nous allons faire les hypothèses suivantes sur l'espace considéré.

1. $X_0 = \{0\}$.
2. $X_n \subset X_{n+1}$.

3. $\forall a > 0, aX_n = X_n$.
4. $X_n + X_n \subset X_{cn}$, où c est une constante indépendante de n et supérieure à 1.
5. $f \in X$ a une meilleure approximation dans X_n .
6. $\forall f \in X \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(f)_X = 0$.

Nous adopterons aussi une notation d'équivalence qui est définie de la manière suivante

$$A \asymp B \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0 \mid C_1 A < B < C_2 A.$$

2.2.1.2 Espaces d'approximation

Dans cette section, nous allons revenir sur les espaces d'approximation et leurs propriétés principales. Ceux-ci sont définis de la façon suivante : $\forall \alpha > 0$

$$\mathcal{A}^\alpha(X) = \{f \in X \mid E_n(f)_X = \mathcal{O}(n^{-\alpha}), \text{ avec } n \rightarrow \infty\}.$$

Ces ensembles n'étant pas pratiques à caractériser, on définit des sous-ensembles de ceux-ci de la manière suivante

$$\mathcal{A}_q^\alpha(X) = \{f \in X \mid |f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} < \infty\},$$

où $q \in \mathbb{R}_0^+$. La quantité $|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha}$ est donnée par l'expression suivante

$$|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} = \begin{cases} \left(\sum_{n \geq 1} (n^\alpha E_n(f)_X)^q \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty \\ \sup_{n \geq 1} n^\alpha E_n(f)_X & q = \infty \end{cases}.$$

On peut définir la norme d'espace suivante

$$\forall f \in \mathcal{A}_q^\alpha(X), \|f\|_{\mathcal{A}_q^\alpha} = \|f\|_X + |f|_{\mathcal{A}_q^\alpha}.$$

Ces quelques définitions permettent d'introduire les propriétés suivantes. La première propriété précise simplement que les ensembles $\mathcal{A}_q^\alpha(X)$ sont décroissants en q .

Proposition 2.2.1:

Soit l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$, et les sous-espaces d'approximation $X_n \subset X \ n \geq 0$. Alors,

$$\forall \alpha > 0, \forall 0 < q < p \leq \infty \ \mathcal{A}_q^\alpha(X) \subset \mathcal{A}_p^\alpha(X).$$

Preuve:

La preuve de cette propriété est assez directe. En effet, elle découle du fait que $|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha}$ consiste en une norme q pondérée. Dès lors, puisque pour tout q inférieur p , la norme p est inférieure à la norme q . Cela revient bien à dire que $\mathcal{A}_q^\alpha(X) \subset \mathcal{A}_p^\alpha(X)$.

□

La deuxième propriété que nous allons évoquer nous confirme simplement que nous avons défini des sous-espaces de l'espace d'approximation.

Proposition 2.2.2:

Soit l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$, et les sous-espaces d'approximation $X_n \subset X \ n \geq 0$. Alors,

$$\forall \alpha > 0, \forall q \in \mathbb{R}_0^+ \ \mathcal{A}_q^\alpha(X) \subset \mathcal{A}^\alpha(X)$$

Preuve:

Soit $\alpha > 0$ et $q \in \mathbb{R}_0^+$. La preuve se scinde alors naturellement en 2 parties. Dans un premier temps, nous allons considérer $q = \infty$ et dans un second temps $q < \infty$.

- Considérons $q = \infty$. Supposons par l'absurde que $\exists f \in \mathcal{A}_q^\alpha(X)$ tq $f \notin \mathcal{A}^\alpha(X)$. On sait donc que $\forall M > 0 \exists n \geq 0 \mid E_n(f)_X > Mn^{-\alpha}$. Nous obtenons alors $\forall M > 0$

$$\begin{aligned} |f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} &= \sup_{n \geq 1} n^\alpha E_n(f)_X \\ &> M. \end{aligned}$$

On cherche donc une valeur supérieure à n'importe quel M . Cela signifie bien que $|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} = \infty$. On obtient une contradiction avec $f \in \mathcal{A}_q^\alpha(X)$.

- Supposons $q < \infty$. Nous savons grâce à la proposition 2.2.1 que

$$\mathcal{A}_q^\alpha(X) \subset \mathcal{A}_\infty^\alpha(X).$$

Or, nous venons de montrer que $\mathcal{A}_\infty^\alpha(X) \subset \mathcal{A}^\alpha(X)$. D'où,

$$\mathcal{A}_q^\alpha(X) \subset \mathcal{A}^\alpha(X).$$

□

Enfin, la dernière proposition permet de donner une définition alternative de $\mathcal{A}_q^\alpha(X)$.

Proposition 2.2.3:

Soit l'espace normé $(X, \|\cdot\|_X)$, et les sous-espaces d'approximation $X_n \subset X$ $n \geq 0$. Alors, $\forall \alpha > 0, \forall q \in \mathbb{R}_0^+$

$$|f|_{\mathcal{A}_q^\alpha} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{k \geq 0} \left(2^{k\alpha} E_{2^k}(f)_X \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty \\ \sup_{k \geq 0} 2^{k\alpha} E_{2^k}(f)_X & q = \infty \end{cases}.$$

2.2.1.3 Espaces d'interpolation

Dans cette section, nous considérons les espaces d'interpolation. On s'intéresse à ces espaces de manière à pouvoir en apprendre plus sur les espaces d'approximation. Le lien entre les deux types d'espaces sera clairement établi plus tard. Néanmoins on peut déjà mentionner que ceux-ci ont été étudiés dans ce cadre afin d'obtenir des informations sur $\mathcal{A}^\beta(X)$ à partir de $\mathcal{A}^\alpha(X)$.

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, deux espaces normés. Supposons que $Y \subset X$ et que $\exists C \geq 0 \mid \|\cdot\|_X \leq C\|\cdot\|_Y$. On définit une K -fonctionnelle de la manière suivante : $\forall f \in X \forall t > 0$

$$K(f, t) = K(f, t, X, Y) = \inf_{g \in Y} \|f - g\|_X + t\|g\|_Y.$$

La K -fonctionnelle permet donc d'approximer f dans Y avec un terme de pénalité.

Proposition 2.2.4:

Soit f arbitraire dans X . Alors, $K(f, \cdot)$, définie sur \mathbb{R}^+ est monotone.

Preuve:

Comme $\forall g \in Y \ \|g\|_Y \geq 0$, on a bien $K(f, \cdot)$ croissante.

□

Les K -fonctionnelles sont utilisées pour définir les espaces d'interpolation. En effet, supposons que T soit un opérateur linéaire borné de Y dans Y et que sa norme soit inférieure à M . Alors, $\forall t > 0 \forall g \in Y$,

$$\begin{aligned} Tf &= T(f - g) + Tg \\ \Rightarrow K(Tf, t) &\leq \|T(f - g)\|_X + t\|Tg\|_Y \\ &\leq M(\|f - g\|_X + t\|g\|_Y) \\ \Rightarrow K(Tf, t) &\leq MK(f, t) \\ \Rightarrow \|K(Tf, \cdot)\| &\leq M\|K(f, \cdot)\|, \end{aligned}$$

où $\|\cdot\|$ est une norme fonctionnelle. On peut ainsi définir l'espace d'interpolation comme l'espace dans lequel la dernière norme est finie. Dans la suite, nous nous attarderons sur ces espaces avec les normes θ et q . Soit $0 < \theta < 1$ et $0 < q \leq \infty$, on trouve la définition suivante

$$(X, Y)_{\theta, q} = \{f \in X \mid |f|_{(X, Y)_{\theta, q}} < \infty\}.$$

La quantité $|f|_{(X, Y)_{\theta, q}}$ est calculée de la façon suivante

$$|f|_{(X, Y)_{\theta, q}} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(f, t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty \\ \sup_{n \geq 1} t^{-\theta} K(f, t) & q = \infty \end{cases}.$$

On retrouve une expression très similaire à celle utilisée pour définir les espaces d'approximation. Cela laisse entrevoir une certaine relation entre ceux-ci. De plus, grâce à la proposition suivante, on peut réécrire cette quantité sous une forme encore plus proche de la précédente.

Proposition 2.2.5:

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, deux espaces normés et soit $0 < \theta < 1$ et $0 < q \leq \infty$. Alors,

$$|f|_{(X, Y)_{\theta, q}} \asymp \begin{cases} \left(\sum_{k \geq 0} \left(2^{k\theta} K(f, 2^{-k}) \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}, & 0 < q < \infty \\ \sup_{k \geq 0} 2^{k\theta} K(f, 2^{-k}) & q = \infty \end{cases}.$$

2.2.1.4 Inégalités de Jackson et Bernstein

Dans cette section, nous allons mettre en lien la relation entre les espaces d'approximation et d'interpolation au moyen des inégalités de Jackson et Bernstein. Commençons donc par revenir sur ces deux inégalités. Tout d'abord, l'inégalité de Jackson est telle que

$$\exists r > 0 \forall f \in Y \exists C > 0 \mid E_n(f)_X \leq Cn^{-r}\|f\|_Y.$$

Ensuite, l'inégalité de Bernstein est la suivante :

$$\exists r > 0 \forall S \in X_n \exists C > 0 \mid \|S\|_Y \leq Cn^r\|S\|_X.$$

Dès qu'une de ces inégalités est vérifiée, nous pouvons comparer l'erreur d'approximation et la K -fonctionnelle. Par exemple, si l'inégalité de Jackson est vérifiée, nous pouvons choisir $g \in Y$ tel que

$$\|f - g\|_X + n^{-r}\|g\|_Y = K(f, n^{-r}).$$

Si nous supposons maintenant que S est le meilleur approximant de g dans X_n , nous trouvons

$$\begin{aligned} E_n(f) &\leq \|f - S\|_X \\ &\leq \|f - g\|_X + \|g - S\|_Y \\ &\leq \|f - g\|_X + Cn^{-r}\|g\|_Y \\ &\leq CK(f, n^{-r}). \end{aligned}$$

Les théorèmes que nous allons présenter maintenant établissent plusieurs liens entre les espaces d'approximation et d'interpolation. Le premier permet de caractériser un espace d'approximation pour autant qu'on connaisse l'espace d'interpolation correspondant et que le sous-espace Y soit bien choisi.

Théorème 2.2.1:

Supposons que les inégalités de Jackson et Bernstein soient vérifiées. Alors,

$$\forall 0 < \gamma < r \quad \forall 0 < q \leq \infty \quad \mathcal{A}_q^\gamma(X) = (X, Y)_{\frac{\gamma}{r}, q}.$$

De plus, les normes de ces deux espaces sont équivalentes.

Intuitivement, ce théorème permet de faire le lien entre les espaces d'approximation et d'interpolation. Comme les espaces d'interpolation sont mieux connus, on trouve donc une alternative au calcul des espaces d'approximation qui peut être difficile.

Le prochain théorème permet lui de caractériser un espace d'approximation par la connaissance d'un autre.

Théorème 2.2.2:

Supposons que $\forall 0 < s \leq \infty \quad \forall \gamma > 0$, l'espace X_n satisfait les inégalités de Jackson et Bernstein pour $Y = \mathcal{A}_s^\gamma(X)$. Alors,

$$\forall 0 < \alpha < r \quad \forall 0 < q \leq \infty, \quad \mathcal{A}_q^\alpha(X) = (X, \mathcal{A}_s^\gamma(X))_{\frac{\alpha}{\gamma}, q}.$$

Ce théorème permet d'obtenir des informations sur $\mathcal{A}^\alpha(X)$ à partir de $\mathcal{A}^\gamma(X)$. De plus, il définit l'espace Y bien choisi du théorème 2.2.1.

2.2.2 Théorème de Deny-Lions

Maintenant que nous avons réussi à présenter le lien existant entre les espaces d'approximations et d'interpolation, nous pouvons présenter un théorème qui est bien connu dans la théorie de l'approximation : le théorème de Deny-Lions. Il existe plusieurs preuves de ce théorème. Nous pouvons notamment citer les références [8],[15],[7]. Ce théorème permet de donner une borne d'erreur de l'approximation d'une fonction par des polynômes. Ce théorème est valable dans le cadre des espaces de Sobolev. Dans ce mémoire, nous noterons ces derniers

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid D^m f \in L_p(\Omega)\},$$

avec $m, p \in \mathbb{N}_0$ et $D^m f$ correspond à la dérivée *mème* de f .

Théorème 2.2.3:

Soit Ω , le domaine de f . On a $\forall Uf \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_p(\Omega)} \leq C \|Uf\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}.$$

La constante C est donnée par $\frac{2}{(m-1)!}d^{m+\frac{1}{2}}$ en une dimension avec d qui représente le diamètre de l'espace étudié.

Ce théorème est très intéressant car il nous donne directement une borne d'erreur sur un ensemble de polynômes.

Chapitre 3

Résultats sur l'opérateur de Koopman

Dans ce chapitre, nous allons développer une borne d'erreur sur l'opérateur de Koopman et l'analyser. Cette borne sera obtenue à partir de tous les résultats présentés dans le chapitre 2. Nous allons commencer par dériver les résultats obtenus grâce aux espaces d'interpolation et d'approximation. Ensuite, nous étudierons la borne qu'on peut obtenir grâce au théorème de Deny-Lions. Enfin, nous étudierons cette borne d'erreur afin d'étudier son utilité pratique.

3.1 Espace d'approximation

Dans cette section, nous allons simplement présenter quelques espaces d'interpolations afin de dériver des résultats directement sur l'opérateur de Koopman.

Nous avons directement un résultat sur les espaces de Sobolev. En effet, la référence [6], donne différents espaces d'interpolations. On peut notamment citer que $\forall 1 \leq p_1, p_2 \leq \infty$

$$W^{m,p}(\Omega) = (W^{m,p_1}(\Omega), W^{m,p_2}(\Omega))_{\theta,p},$$

avec $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_2} + \frac{1-\theta}{p_1}$. Le résultat obtenu par le théorème 2.2.1 nous donne directement que $\forall Uf \in W^{m,p}(\Omega)$

$$E_n(Uf) \leq Cn^{-p},$$

où la projection se fait sur $W^{m,p_2}(\Omega)$ à partir de l'espace $W^{m,p_1}(\Omega)$. Il suffit alors de trouver la condition sur f équivalente au fait que $Uf \in W^{m,p}(\Omega)$.

3.2 Théorème de Deny-Lions

Dans cette section, nous allons donc appliquer le théorème de Deny-Lions et utiliser la borne présentée dans la section 2.2.2. Ensuite, nous essaierons de déterminer une condition sur f et non plus sur Uf .

Commençons donc par appliquer le théorème de Deny-Lions. Ce dernier nous donne le résultat suivant $\forall Uf \in W^{m,p}$

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_p(\Omega)} \leq C|Uf|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Le problème que nous rencontrons ici est que nous ne connaissons pas la valeur de $|Uf|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Nous allons donc devoir développer cette expression afin d'avoir des termes que l'on connaît. Pour plus de simplicité, nous allons d'abord le faire dans un cas simplifié avant d'essayer de généraliser le résultat.

3.2.1 Cas simplifié

Nous allons supposer ici que nous travaillons dans $W^{1,2}(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas-ci, nous avons

$$\begin{aligned} |Uf|_{W^{1,2}(\Omega)} &= \|D^1(Uf)\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|D^1(f \circ \phi)\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|(f' \circ \phi)\phi'\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|(f' \circ \phi)\|_{L_2(\Omega)} \|\phi'\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Essayons de redévelopper un peu plus $\|(f' \circ \phi)\|_{L_2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \|(f' \circ \phi)\|_{L_2(\Omega)} &= \left(\int_{\Omega} |f'(\phi(x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\phi(\Omega)} |f'(y)|^2 \frac{dy}{\phi'(\phi^{-1}(y))} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\phi(\Omega)} |f'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où nous avons effectué un changement de variable et appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour conclure, nous avons que

$$|Uf|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq \left(\int_{\phi(\Omega)} |f'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L_2(\Omega)}.$$

3.2.2 Cas général

Nous allons maintenant nous intéresser à un cas un peu plus général. Nous allons supposer ici que nous travaillons dans $W^{m,2}(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}$. Dans ce cas-ci, nous avons

$$\begin{aligned} \|D^m(Uf)\|_{L_2(\Omega)} &= \|D^m f \circ \phi\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^m f^{(k)}(\phi(x)) B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x)) \right\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|f^{(k)}(\phi(x)) B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|f^{(k)}(\phi(x))\|_{L_2(\Omega)} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité triangulaire, la formule de Faà Di Bruno [14] et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. La formule de Faà Di Bruno fait introduire les polynômes de Bell. Ceux-ci sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B_{0,0}(x) &= 1 \\ \forall m \geq 1, B_{m,0}(x) &= 0 \\ \forall k \geq 1, B_{0,k}(x) &= 0 \\ B_{m,k}(x_1, \dots, x_{r-k+1}) &= \sum_{i=1}^{m-k+1} C_{i-1}^{m-1} x_i B_{m-i,k-1}(x_1, \dots, x_{m-i-k+2}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Il existe évidemment des définitions équivalentes des polynômes de Bell. Le lecteur peut consulter [13] pour plus d'informations. Nous avons dès lors une borne sur $|Uf|_{W^{m,2}(\Omega)}$. En effet,

$$\begin{aligned} |Uf|_{W^{m,2}(\Omega)} &= \|D^m f\|_{L_2} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|f^{(k)}(\phi(x))\|_{L_2} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(\alpha-k+1)}(x))\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Essayons de redévelopper un peu plus $\|f^{(k)}(\phi(x))\|_{L_2}$. On obtient

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}(\phi(x))\|_{L_2} &= \left(\int_{\Omega} |f^{(k)}(\phi(x))|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où nous avons effectué un changement de variable et appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour conclure, nous avons que

$$|Uf|_{W^{m,2}(\Omega)} \leq \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^m \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2(\Omega)} \right).$$

Nous pouvons directement appliquer le théorème de Deny-Lyons. En effet, nous pourrions montrer assez aisément que les fonctions et les espaces utilisés respectent les conditions demandées.

Nous avons obtenu grâce à nos développements que

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\int_{\phi(\Omega)} |f'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L_2(\Omega)},$$

où C est la constante définie à la section 2.2.2.

3.2.3 Exemple : la logistique

Maintenant que nous avons réussi à trouver une borne pour l'erreur, nous pouvons appliquer cette borne sur un exemple afin d'analyser sa performance dans un cas précis. Lors de nos simulations, nous avons travaillé sur la fonction $f = id$ et approximé l'opérateur de Koopman avec la méthode *EDMD* présentée à la section 2.1.2.2 en utilisant 300 états initiaux. Nous avons aussi conservé les mêmes paramètres que ceux utilisés à la section 2.1.2.3. Pour analyser la borne d'erreur, nous allons faire varier deux paramètres différents. Dans un premier temps, nous allons faire varier la dimension de l'espace d'approximation. Dans un second temps, nous ferons varier la taille du domaine de la fonction.

Commençons par faire varier la taille du domaine de f . Nous avons décidé de travailler avec un domaine de la forme $[0, b]$, avec $b \in \mathbb{R}$. Comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.1, on peut avoir divergence de la borne dans le cas où la taille du domaine est trop importante. Si nous ne pouvons déterminer cette dernière, il faut donc choisir la dimension de l'espace d'approximation de manière à minimiser la borne obtenue.

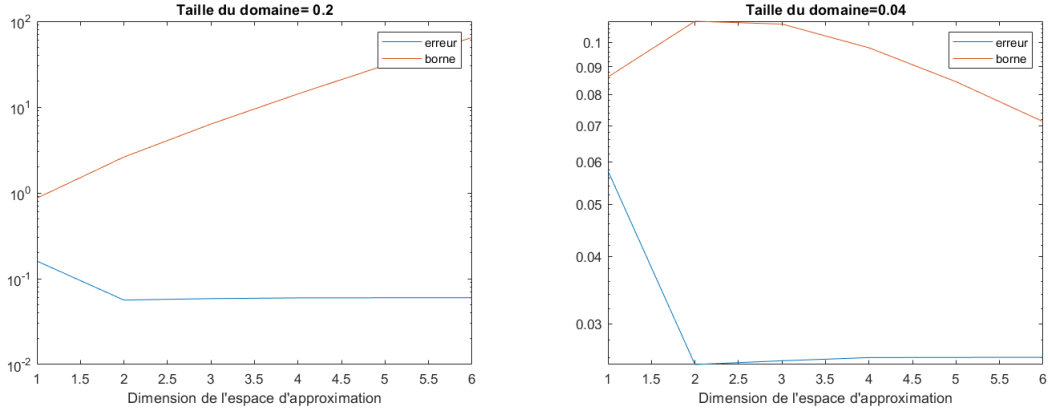


FIGURE 3.1 – Borne d'erreur avec variation de la dimension de l'espace d'approximation.

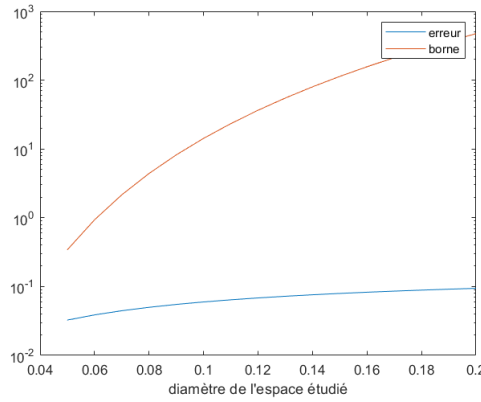


FIGURE 3.2 – Borne d'erreur avec variation de la taille du domaine.

Dans le cas où nous modifions la taille du domaine, nous observons sur la figure 3.2 qu'au plus ce dernier est petit, meilleure est la borne. Toutefois, on peut noter qu'au plus on réduit le domaine, au moins on a d'information sur la fonction étudiée. En effet, même si l'erreur est plus petite, on ne connaît la fonction que sur un plus petit intervalle. Il faut donc faire un compromis entre la dimension de l'espace et la taille du domaine. .

Intéressons-nous maintenant aux raisons analytiques qui expliquent les figures 3.1 et 3.2. Nous allons considérer un domaine général $\Omega = [a, b]$.

Pour rappel, l'inégalité de Deny-Lions nous avait permis d'écrire $\forall Uf \in W^{m,p}$

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^m \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2} \right),$$

avec la constante C définie comme

$$C = \frac{2}{(m-1)!} d^{m+\frac{1}{2}},$$

et d le diamètre de l'espace étudié.

Intéressons-nous maintenant aux autres termes de l'inégalité. On peut observer les choses suivantes :

- La fonction choisie est l'identité. De ce fait,

$$\begin{aligned} f' &= 1 \\ f^{(k)} &= 0 \end{aligned} \quad \forall k > 1.$$

Cela nous permet de constater que

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\int_{\phi(\Omega)} |\delta_1^k|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2} \\ &= \sqrt{|\phi(b) - \phi(a)|} \sum_{k=1}^m \delta_1^k \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2} \\ &= \sqrt{|\phi(b) - \phi(a)|} \|B_{m,1}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m)}(x))\|_{L_2}. \end{aligned}$$

- Si on s'intéresse à la définition des polynômes de Bell, on obtient que

$$\begin{aligned} B_{m,1}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m)}(x)) &= \sum_{i=1}^m C_{i-1}^{m-1} \phi^{(i)}(x) B_{m-i,0}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-i)}(x)) \\ &= \sum_{i=1}^m C_{i-1}^{m-1} \phi^{(i)}(x) \delta_i^m \\ &= C_{m-1}^{m-1} \phi^{(m)}(x) \\ &= \phi^{(m)}(x), \end{aligned}$$

où l'on a simplement utilisé la relation de récurrence des polynômes de Bell définie à l'équation (3.1).

On obtient donc finalement que :

$$\sum_{k=1}^m \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2} = \sqrt{|\phi(b) - \phi(a)|} \|\phi^{(m)}\|_{L_2}$$

- Finalement, comme on travaille avec une dynamique logistique de paramètre 3 et qu'on étudie un intervalle de temps de 1, on peut calculer le flot. Celui-ci est calculé à la section 2.1.2.3. Si on simplifie son expression et qu'on calcule ses dérivées, on obtient les expressions suivantes : $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{xe^3}{1 - x + xe^3} \\ \phi^{(k)} &= \frac{k!e^3(1 - e^3)^{k-1}}{(1 - x + xe^3)^{k+1}} \end{aligned} \quad \forall k \geq 1.$$

Cela nous permet de calculer explicitement $\|\phi^{(k)}\|_{L_2(\Omega)} \forall k \geq 1$. Soit $k \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \|\phi^{(k)}\|_{L_2} &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{k!e^3(1-e^3)^{k-1}}{(1-x+xe^3)^{k+1}} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k!e^3|1-e^3|^{k-2} \sqrt{|1-e^3|} \left(\int_{\Omega} \frac{1-e^3}{(1-x+xe^3)^{2k+2}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= k!e^3|1-e^3|^{n-2} \sqrt{|1-e^3|} \sqrt{\frac{1}{2k+1} \left| \frac{1}{(1-b+be^3)^{2k+1}} - \frac{1}{(1-a+ae^3)^{2k+1}} \right|}. \end{aligned}$$

Ces différents développements nous permettent de montrer que

$$\begin{aligned} \inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} &\leq \frac{2}{(m-1)!} \frac{d^{m+\frac{1}{2}}}{|B|^{\frac{1}{2}}} \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad m!e^3|1-e^3|^{m-2} \sqrt{|1-e^3|} \sqrt{\frac{1}{2m+1} \left| \frac{1}{(1-b+be^3)^{2m+1}} - \frac{1}{(1-a+ae^3)^{2m+1}} \right|}. \end{aligned}$$

Pour analyser le taux de convergence de cette borne, nous utiliserons la notation \asymp . Cette dernière est définie suivante $A \asymp B \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 > 0 |C_1 B \leq A \leq C_2 B$. Le taux de convergence de cette borne devient donc

$$\begin{aligned} \inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} &\asymp \frac{(b-a)^{m+\frac{1}{2}}}{(m-1)!} m!|1-e^3|^{m-2} \sqrt{\frac{1}{2m+1} \left| \frac{1}{(1-b+be^3)^{2m+1}} - \frac{1}{(1-a+ae^3)^{2m+1}} \right|} \\ &\asymp (b-a)^{m+\frac{1}{2}} m|1-e^3|^{m-2} \sqrt{\frac{1}{2m+1} \left| \frac{1}{(1-b+be^3)^{2m+1}} - \frac{1}{(1-a+ae^3)^{2m+1}} \right|}. \end{aligned}$$

Certains termes peuvent être contrôlés grâce à la taille du domaine. Intéressons-nous aux termes incontrôlables. Il s'agit de :

$$m|1-e^3|^{m-2} \sqrt{\frac{1}{2m+1}}.$$

On doit maintenant choisir le domaine de sorte que notre borne soit bel et bien convergente et étudier son taux de convergence. En conclusion, on remarque qu'en fonction du flot de la fonction étudiée, la borne d'erreur obtenue aura une convergence différente. Toutefois, cette divergence peut toujours être contrôlée en modifiant la taille du domaine étudié. Dans le cas de l'exemple de la figure 3.1, la valeur charnière de convergence est d'environ 0.05.

3.3 Recherche d'une borne ponctuelle

Dans cette section, nous allons montrer comment utiliser la borne obtenue précédemment afin d'obtenir une borne ponctuelle. En effet, il est bien utile de connaître l'erreur ponctuelle effectuée sur une fonction que l'erreur L_2 que nous avons utilisée jusque-là. Pour obtenir le résultat, nous allons utiliser deux résultats intermédiaires. Le premier permet de comparer la norme L_2 de polynômes à leur norme de Sobolev. Le deuxième permet de faire le lien entre norme de Sobolev et norme infinie.

3.3.1 Normes de polynômes

Dans cette première section, nous allons analyser différentes normes de polynômes. Nous continuerons à travailler sur \mathbb{P}_n sur l'intervalle $[a, b]$. Commençons par définir la base de polynômes orthornormaux que nous noterons $p_i(x)$ avec $i = 1, \dots, n$. Regardons maintenant ce que vaut la norme L_2 d'un polynôme arbitraire $p(x)$. On a

$$\begin{aligned} \|p(x)\|_2^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x) \right\|_2^2 \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i(x) \right)^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \int_a^b (p_i(x))^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \|p_i(x)\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2. \end{aligned}$$

Intéressons-nous maintenant à la norme de Sobolev $\|p\|_{W^{m,2}(\Omega)}$. Pour rappel, cette dernière peut se calculer comme

$$\|p\|_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{j=0}^m \|D^{(j)}p\|_{L_2}.$$

Nous allons donc nous intéresser à $\|D^{(j)}p\|_{L_2}$. Nous pouvons effectuer le raisonnement

suivant :

$$\begin{aligned}
\|D^{(j)}p\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i D^j p_i(x) \right\|_2^2 \\
&= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i D^j p_i(x) \right)^2 dx \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^2 \int_a^b (D^j p_i(x))^2 dx + 2 \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \alpha_l \alpha_{i-l} \int_a^b D^j p_l(x) D^j p_{i-l}(x) dx \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^2 \int_a^b (D^j p_i(x))^2 dx + 2 \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor \max_i \alpha_i^2 \int_a^b (D^j p_i(x))^2 dx \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^2 \|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 + 2 \lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor \max_i \alpha_i^2 \|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^2 \|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 + (i-1) \max_i \alpha_i^2 \|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i^2 \|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 + (i-1) \alpha_{i^*}^2 \|D^j p_{i^*}(x)\|_{L_2}^2 \right) \\
&\leq \sum_{i=1, i \neq i^*}^n \left(\alpha_i^2 \|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 \right) + \alpha_{i^*}^2 \|D^j p_{i^*}(x)\|_{L_2}^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \alpha_{i^*}^2 \|D^j p_{i^*}(x)\|_{L_2}^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \left(\|D^j p_i(x)\|_{L_2}^2 \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \right) \right) \\
&\leq \|p(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \max_i \left\{ \|D^j p_i(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \right) \right\}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\|p\|_{W^{m,2}(\Omega)} \leq \left(\sum_{j=0}^m \max_i \left\{ \|D^j p_i(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \right) \right\} \right) \|p\|_{L_2}.$$

Pour plus de clarté dans la suite, nous utiliserons la notation suivante

$$\left(\sum_{j=0}^m \max_i \left\{ \|D^j p_i(x)\|_{L_2(\Omega)} \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \right) \right\} \right) = C_1.$$

Pour donner une idée de l'ordre de grandeur de cette valeur, nous pouvons par exemple nous intéresser au cas où l'on travaille sur $[0, 0.05]$ et avec l'espace de Sobolev $W^{5,2}([0, 0.05])$. Dans ce cas, on a les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
\text{sur } \mathbb{P}_3 : C_1 &= 5.110^6, \\
\text{sur } \mathbb{P}_4 : C_1 &= 3.310^9, \\
\text{sur } \mathbb{P}_5 : C_1 &= 2.310^{12}, \\
\text{sur } \mathbb{P}_6 : C_1 &= 1.710^{15}, \\
\text{sur } \mathbb{P}_7 : C_1 &= 2.010^{16}.
\end{aligned}$$

Comme on l'observe les valeurs de cette constante semblent très élevées. De plus, cette constante semble diverger assez rapidement. Toutefois, nous étudierons cela plus en détail sur l'exemple de la logistique.

3.3.2 Espaces d'Hilbert à noyau reproduisant

Pour pouvoir faire le lien entre la norme de Sobolev et la norme infinie, nous allons utiliser la notion d'espace d'Hilbert à noyau reproduisant. Beaucoup d'études ont été faites sur le sujet et le lecteur peut consulter les références [2],[3] pour plus d'informations. Nous nous contenterons ici d'expliquer brièvement ce qu'est un espace d'Hilbert à noyau reproduisant et comment nous pourrions utiliser cette notion dans notre cas.

Un espace d'Hilbert à noyau reproduisant H est un espace de Hilbert de fonctions à valeurs dans X , c'est à dire muni d'un produit scalaire associé à une norme. De plus un tel espace doit être muni d'un noyau $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\forall f \in H \quad \forall x \in X \quad f(x) = \langle f(\cdot), K(x, \cdot) \rangle.$$

Ce qui est très intéressant avec ce type d'espace est qu'il existe une définition équivalente. En effet, on peut le définir en imposant la bornitude de toutes les fonctionnelles d'évaluation. On peut faire le lien entre les deux définitions de la manière suivante. Soit $f \in H$ et $x \in X$, on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle f(\cdot), K(x, \cdot) \rangle| \\ &\leq \|f\|_H \|K(x, \cdot)\|_H. \end{aligned}$$

Cette notion peut être appliquée dans notre cadre car l'espace de Sobolev $W^{m,2}(\mathbb{R})$ est un espace d'Hilbert à noyau reproduisant. En effet, la référence [3] nous indique que

$$K(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x-t)u}}{1 + \sum_{\alpha=0}^m (2\pi u)^\alpha} du.$$

On a donc $\forall f \in W^{m,2}(\mathbb{R})$

$$|f(x)| \leq \|K(x, \cdot)\|_{W^{m,2}(\mathbb{R})} \|f\|_{W^{m,2}(\mathbb{R})},$$

avec $K(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i(x-t)u}}{1 + \sum_{\alpha=0}^m (2\pi u)^\alpha} du$. Pour la suite, nous noterons $\|K(x, \cdot)\|_{W^{m,2}(\mathbb{R})} = C_2$. Pour donner une idée intuitive de la valeur de cette constante, on peut s'intéresser à un espace de Sobolev en particulier et regarder sa valeur. On obtient par exemple pour $W^{5,2}([0, 0.05])$

$$\text{en } 0.2 : C_2 = 6.86,$$

$$\text{en } 0.5 : C_2 = 5.76,$$

$$\text{en } 0.2 : C_2 = 7.84.$$

3.3.3 Borne sur la fonctionnelle d'évaluation

Maintenant que nous avons trouvé ces deux constantes, nous pouvons généraliser le résultat que nous avons obtenu précédemment. Pour rappel, nous avons que

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} \leq C \|Uf\|_{W^{m,2}(\Omega)}.$$

De plus, nous pouvons noter que

$$\begin{aligned} \|Pf\|_{W^{m,2}(\Omega)} &\leq C_1 \|Pf\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|f\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \|f\|_{W^{m,2}(\Omega)}, \end{aligned}$$

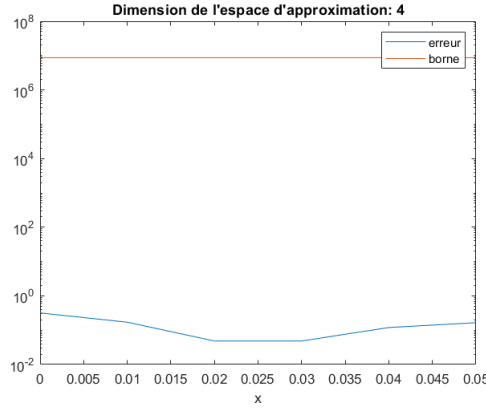


FIGURE 3.3 – Borne d’erreur point par point trouvée grâce à la théorie de l’approximation. Dimension de l’espace d’approximation : 3.

où nous avons noté Pf la projection L_2 de f sur \mathbb{P}_n . Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \|f - Pf\|_{W^{m,2}(\Omega)} &\leq \|f - g\|_{W^{m,2}(\Omega)} + \|Pf - Pg\|_{W^{m,2}(\Omega)} \\ &\leq (1 + C_1)\|f - g\|_{W^{m,2}(\Omega)} \\ \Rightarrow \|Uf - PUf\|_{W^{m,2}(\Omega)} &\leq (1 + C_1) \inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{W^{m,2}(\Omega)} \\ &\leq (1 + C_1)C\|Uf\|_{W^{m,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dès lors, on peut effectuer le raisonnement suivant $\forall x \in \Omega$

$$\begin{aligned} |Uf(x) - PUf(x)| &\leq C_2 \inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{W^{m,2}(\Omega)} \\ &\leq C_2(1 + C_1)C\|Uf\|_{W^{m,2}(\Omega)}. \end{aligned}$$

3.3.3.1 Cas de la logistique

Afin de pouvoir observer de façon concrète la consistance de cette borne, nous pouvons par exemple reprendre le cas de la logistique présenté à la section 2.1.2.3. Après quelques simulations numériques, nous obtenons les résultats présentés à la figure 3.3. Nous avons par exemple effectué des simulations numériques afin d’illustrer nos propos. En ce qui concerne la projection utilisée numériquement, nous utilisons EDMD avec un nombre d’états initiaux égal à 300. De ce fait, on peut admettre que la projection effectuée numériquement est proche d’une projection L_2 . Sur la figure 3.3, on peut observer que la borne trouvée n’est pas optimale. En effet, comme nous avons déjà pu l’observer dans la section 3.3.1, la constante C_1 est excessivement grande par rapport à l’erreur commise. Dès lors, même si nous avons une borne qui converge en n , il faudrait trouver une meilleure constante C_1 que celle proposée ici afin que la borne soit acceptable.

3.4 Condition sur le flot

Dans cette section, nous allons nous intéresser à un cas un peu plus réaliste. En effet, dans la plupart des cas, on ne peut supposer une connaissance complète du flot et de ses dérivées. On peut toutefois supposer que

$$\forall i \in \mathbb{N} \exists c_i, C_i \in \mathbb{R}_0^+ \mid \forall x \in \Omega \ c_i < |\phi^{(i)}(x)| < C_i.$$

Intéressons-nous maintenant à ce que l'on peut dire de la borne d'erreur dans ces conditions. Pour rappel, cette borne était $\forall Uf \in W^{m,p}(\Omega)$

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left(\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^m \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2(\Omega)} \right),$$

. Deux termes dépendent du flot ou de ses dérivées. Nous allons les étudier individuellement.

1. Le premier terme se traite assez directement. En effet, on peut observer que

$$\int_{\phi(\Omega)} \frac{dy}{|\phi'(\phi^{-1}(y))|} \leq c_1 \mu(\phi(\Omega)),$$

avec $\mu(\phi(\Omega))$ la mesure de Lebesgue de l'espace $\phi(\Omega)$.

2. Pour le second terme à traiter, nous avons un terme plus facile à traiter si nous nous intéressons à une formule explicite des polynômes de Bell. En effet, dans la référence [13], on a à la fois la formule par récurrence définie à l'équation 3.1 et une formule explicite. Cette dernière est donnée par

$$B_{m,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1}) = \sum_{j \in J_{m,k}} \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{x_2}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{x_{n-k+1}}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}},$$

avec $x_l \in \Omega \ \forall 1 \leq l \leq m$ et $J_{m,k} = \{(j_1, \dots, j_{m-k+1}) \in \mathbb{N}^{m-k+1} \mid \sum_{i=1}^{m-k+1} j_i = k \wedge \sum_{i=1}^{m-k+1} i j_i = m\}$. La borne sur l'erreur peut donc se simplifier grâce au développement

suivant :

$$\begin{aligned}
& \|B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} B_{m,k}(\phi'(x), \dots, \phi^{(m-k+1)}(x))^2 dx \\
& = \int_{\Omega} \left(\sum_{j \in J_{m,k}} \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{\phi'(x)}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{\phi^2(x)}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{\phi^{(m-k+1)}(x)}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}} \right)^2 dx \\
& = \int_{\Omega} \sum_{j \in J_{m,k}} \left(\frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{\phi'(x)}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{\phi^2(x)}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{\phi^{(m-k+1)}(x)}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}} \right)^2 \\
& + \sum_{j \in J_{m,k}} \sum_{l \in J_{m,k}} \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{\phi'(x)}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{\phi^2(x)}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{\phi^{(m-k+1)}(x)}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}} \\
& \frac{m!}{l_1! l_2! \dots l_{m-k+1}!} \left(\frac{\phi'(x)}{1!} \right)^{l_1} \left(\frac{\phi^2(x)}{2!} \right)^{l_2} \dots \left(\frac{\phi^{(m-k+1)}(x)}{m-k+1!} \right)^{l_{m-k+1}} dx \\
& \leq \int_{\Omega} \sum_{j \in J_{m,k}} \left(\frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{C_1}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{C_2}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{C_{m-k+1}}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}} \right)^2 \\
& + \sum_{j \in J_{m,k}} \sum_{l \in J_{m,k}} \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{C_1}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{C_2}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{C_{m-k+1}}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}} \\
& \frac{m!}{l_1! l_2! \dots l_{m-k+1}!} \left(\frac{C_1}{1!} \right)^{l_1} \left(\frac{C_2}{2!} \right)^{l_2} \dots \left(\frac{C_{m-k+1}}{m-k+1!} \right)^{l_{m-k+1}} dx \\
& \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{j \in J_{m,k}} \frac{m!}{j_1! j_2! \dots j_{m-k+1}!} \left(\frac{C_1}{1!} \right)^{j_1} \left(\frac{C_2}{2!} \right)^{j_2} \dots \left(\frac{C_{m-k+1}}{m-k+1!} \right)^{j_{m-k+1}} \right)^2 dx \\
& \leq \|B_{m,k}(C_1, C_2, \dots, C_{m-k+1})\|_{L_2}^2.
\end{aligned}$$

Au final, on trouve donc la borne suivante $\forall Uf \in W^{m,2}(\Omega)$

$$\inf_{g \in P_m} \|Uf - g\|_{L_2(\Omega)} \leq C (c_1 \mu(\phi(\Omega)))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^r \left(\int_{\phi(\Omega)} |f^{(k)}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \|B_{m,k}(C_1, C_2, \dots, C_{m-k+1})\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).$$

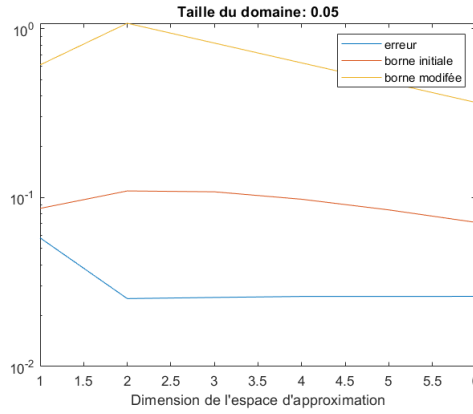


FIGURE 3.4 – Borne sur l'erreur L_2 avec variation de la dimension de l'espace d'approximation.

3.4.1 Cas de la logistique

Afin d'observer si la borne d'erreur reste correcte malgré ces quelques modifications, nous pouvons reprendre l'exemple de la section 2.1.2.3 et comparer les résultats obtenus. On peut observer les résultats numériques sur la figure 3.4. On observe que le changement entre les deux bornes est acceptable. De même, nous avons vérifié numériquement que le taux de convergence reste le même. Dès lors, travailler avec des conditions sur le flot plutôt qu'avec une connaissance parfaite de celui-ci reste acceptable en ce qui concerne la précision de la borne.

Chapitre 4

Un autre type de projection : Les polynômes de Bernstein

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un autre type de projection afin d'évaluer la performance. nous pourrons ensuite comparer les résultats à ceux obtenus au chapitre précédent. Dans notre cas, nous allons présenter une approximation sur des polynômes de Bernstein. Dans un premier temps, nous présenterons quelques résultats connus sur les polynômes de Bernstein. Nous appliquerons ensuite cette théorie à l'opérateur de Koopman afin d'obtenir une borne d'erreur.

4.1 Approximation sur des polynômes de Bernstein

Dans cette section, nous allons présenter la théorie de l'approximation sur des polynômes de Bernstein. Les résultats présentés sont tirés de [4]. En effet, les polynômes de Bernstein sont usuellement définis sur $[0, 1]$. Ainsi, nous commencerons par présenter les résultats sur ce sous-ensemble. Ensuite, nous appliquerons les résultats du papier au cas de l'opérateur de Koopman.

4.1.1 Polynômes de Bernstein

Soit f une fonction quelconque définie sur $[0, 1]$. Commençons par définir les polynômes de Bernstein qui approximent cette fonction f . On définit $\forall n \geq 0 \forall x \in [0, 1]$,

$$(B_n(f))(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_k^n x^k (1-x)^{n-k}.$$

Plusieurs propriétés peuvent être démontrées sur ces polynômes. Nous en présentons quelques une qui pourront nous être utiles plus tard. En effet, on peut montrer que

Proposition 4.1.1:

Soit $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = x^2$,

- $B_n(f_0) = f_0$ et $B_n(f_1) = f_1$.
- $B_n(f_2) = (1 - \frac{1}{n})f_2 + \frac{1}{n}f_1$.
- $\forall x \in [0, 1], \sum_{k=0}^n (\frac{k}{n} - x)^2 C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n}$.

Preuve: — On utilise juste la formule du binôme de Newton pour voir que

$$\sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_k^n x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1.$$

Dès lors, on a directement $B_n(f_0) = f_0$. Montrons maintenant que $B_n(f_1) = f_1$. On a

$$\begin{aligned} (B_n(f_1))(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n C_{k-1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} C_j^{n-1} x^j (1-x)^{(n-1)-j} \\ &= x. \end{aligned}$$

— De manière similaire, on a

$$\begin{aligned} (B_n(f_2))(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Ensuite on peut remarquer que $\forall k \geq 2$

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} &= \frac{k-1}{n-1} \frac{n-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{1}{n} \frac{n-1}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) C_{k-2}^{n-2} + \frac{1}{n} C_{k-1}^{n-1}. \end{aligned}$$

Cela nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} (B_n(f_2))(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) C_{k-2}^{n-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} C_{k-1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x. \end{aligned}$$

— Soit $x \in [0, 1]$. On remarque que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_k^n x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\frac{k}{n} + x^2 \right) C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x^2 \\ &= \frac{1}{n} x(1-x) \\ &\leq \frac{1}{4n}. \end{aligned}$$

□

Avant de présenter l'erreur d'approximation effectuée lors de la projection de f sur les polynômes de Bernstein, nous devons définir une nouvelle quantité qu'on appellera module de continuité. Ce dernier peut se définir de la manière suivante :

$$\forall \delta > 0, w_f(\delta) = w_f(\delta, [a, b]) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta\}.$$

Ce module de continuité est une mesure de la continuité de la fonction f . Au plus ce dernier va être grand, au plus la fonction va varier fortement sur un intervalle d'abscisse de δ . Avant d'enfin présenter la borne obtenue grâce aux polynômes de Bernstein, on doit préciser une propriété de ce module de continuité.

Proposition 4.1.2:

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$ et $\delta > 0$. Alors, $w_f(\lambda\delta) \leq (1 + \lambda)w_f(\delta) \forall \lambda > 0$.

Maintenant, nous pouvons prouver la borne d'erreur suivante

Théorème 4.1.1:

Pour toute fonction f bornée sur $[0, 1]$, on a

$$\|f - B_n(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{3}{2} w_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Preuve:

Soit $x \in [0, 1]$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} |f(x) - (B_n(f))(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq w_f \left(\left| x - \frac{k}{n} \right| \right) \sum_{k=0}^n C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sum_{k=0}^n \left(1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right) C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &= w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \sum_{k=0}^n \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la propriété 4.1.2.

Ensuite, nous avons grâce à la propriété 4.1.1 que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| C_k^n x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right| \left(C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^n \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n C_k^n x^k (1-x)^{n-k} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{4n} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$|f(x) - (B_n(f))(x)| \leq w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \sqrt{n} \frac{1}{2\sqrt{n}} \right).$$

□

4.2 Application à l'opérateur de Koopman

Dans cette section, nous allons appliquer la borne obtenue sur les polynômes de Bernstein à l'opérateur de Koopman. Pour rappel, nous avons directement grâce au théorème 4.1.1 que pour toute fonction f bornée sur $[0, 1]$, on a

$$\|f - B_n(f)\|_{L^\infty} \leq \frac{3}{2} w_f \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Dans le cadre de l'opérateur de Koopman, on a donc que pour toute fonction f telle que Uf est bornée sur $[0, 1]$, on a

$$\|Uf - B_n(Uf)\|_{L^\infty} \leq \frac{3}{2} w_{Uf} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

Nous remarquons que la seule différence dans la borne réside dans le module de continuité. On doit donc essayer de déterminer ce que vaut $w_{Uf}(\frac{1}{\sqrt{n}})$. Nous avons par définition que

$$w_{Uf} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sup \{ |Uf(x) - Uf(y)| \mid x, y \in [a, b], |x - y| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \}.$$

On peut réécrire cette définition de manière similaire comme

$$w_{Uf} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \sup \{ |f(x) - f(y)| \mid x, y \in [a, b], |\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \}.$$

Dès lors, si l'on suppose une continuité de type Lipschitz de sorte que $\forall x, y \in \Omega \exists L > 0$ tel que

$$|\phi^{-1}(x) - \phi^{-1}(y)| \leq L|x - y|, \quad (4.1)$$

alors, on a directement que

$$w_{Uf} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq w_f \left(\frac{1}{L\sqrt{n}} \right).$$

Cette propriété du flot consiste à travailler sur un flot inverse qui réduit les distances entre deux points quelconques. On se retrouve finalement avec la borne suivante

$$\|Uf - B_n(Uf)\|_{L^\infty} \leq \frac{3}{2} w_f \left(\frac{1}{L\sqrt{n}} \right)$$

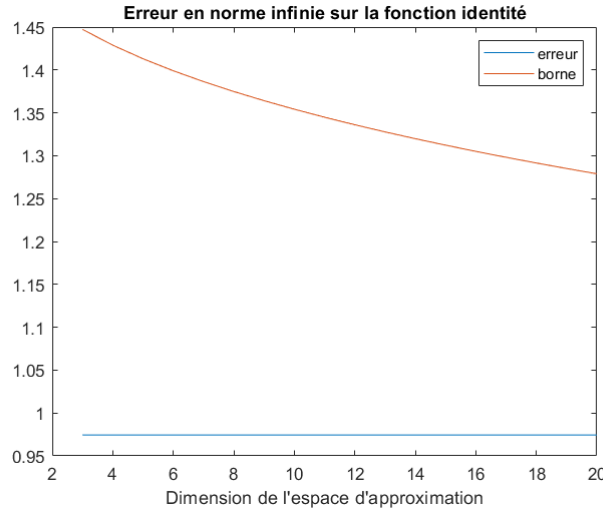


FIGURE 4.1 – Etude de la borne d’erreur après projection sur des polynômes de Bernstein.

4.3 Application à la logistique

Dans cette section, nous allons regarder la précision de cette borne dans le cas de la dynamique de la logistique que nous avons présentée à la section 2.1.2.3. Nous avons effectué des simulations numériques afin d’étudier l’erreur sur la fonction identité. Les résultats sont présentés à la figure 4.1. Sur cette figure, on peut observer que la borne est bel et bien convergente en n . La borne d’erreur semble acceptable au vu de cet exemple. En effet, on a le même ordre de grandeur entre l’erreur et la borne trouvée. On peut toutefois noter que lors des simulations numériques, nous avons calculé le module de continuité en connaissant le flot de la logistique. Toutefois, comme l’on peut avoir la même borne en travaillant avec le module de continuité de f à une constante de Lipschitz près, les résultats resteraient très similaires.

4.4 Comparaison avec la borne précédente

Dans cette section, nous pouvons comparer les résultats de la borne obtenue avec les polynômes de Bernstein et des résultats obtenus à partir du théorème de Deny-Lions. Nous pouvons rappeler les résultats sur la figure 4.2. On peut toutefois noter que l’utilisation des polynômes de Bernstein nous donne directement une borne point par point. Toutefois, ces polynômes sont définis sur $[0, 1]$ et l’on n’a dès lors pas la possibilité de faire varier l’intervalle. De plus, ces derniers nécessitent une connaissance de l’image de la fonction par l’opérateur de Koopman en des points précis. Il est évident que ceci n’est pas automatiquement assuré. Lorsque l’on travaille avec une projection, on connaît immédiatement le taux de convergence en fonction de la taille du domaine. Cela n’est pas le cas avec les polynômes de Bernstein. Il pourrait dès lors être intéressant de généraliser ces polynômes sur un intervalle quelconque $[a, b]$ et d’observer l’impact que cela aurait sur la borne. Enfin, on peut rappeler que la borne que nous avons calculée avec le théorème de Deny-Lions dans la section 3.4 ne nécessite qu’une connaissance partielle du flot. De manière similaire, on obtient uniquement l’apparition d’une constante de Lipschitz dans le cadre des polynômes de Bernstein. Pour comparer les résultats présentés sur la figure 4.2, on peut noter les points suivants.

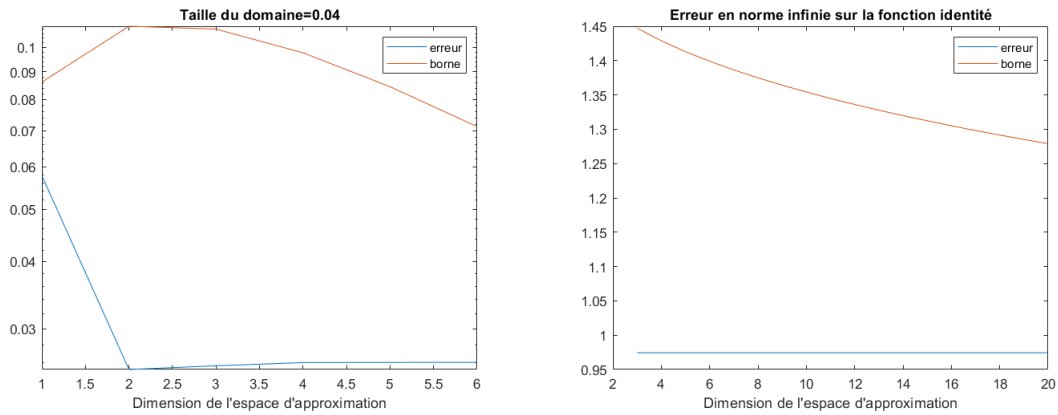


FIGURE 4.2 – Gauche : Borne sur l’erreur L_2 trouvée avec la théorie de l’approximation. Domaine : $[0, 0.04]$. Droite : Borne sur l’erreur L_∞ trouvée grâce aux polynômes de Bernstein. Domaine : $[0, 1]$

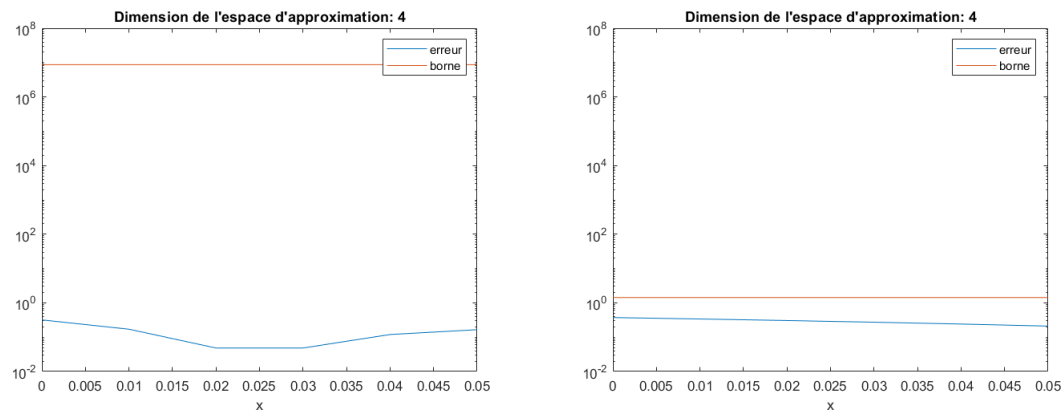


FIGURE 4.3 – Gauche : Borne sur l’erreur point par point trouvée avec le théorème de Deny-Lions. Domaine : $[0, 0.05]$. Droite : Borne sur l’erreur point par point trouvée grâce aux polynômes de Bernstein. Domaine : $[0, 0.05]$

Tout d’abord, les deux bornes ont le même ordre de grandeur que les erreurs commises dans l’exemple. Ensuite, on remarque que l’erreur L_2 diminue de manière plus importante que la norme L_∞ lorsque la dimension de l’espace d’approximation augmente. Cela signifie donc qu’il y a un point du domaine de la fonction où l’erreur commise ne diminue que peu lorsqu’on augmente la dimension de l’espace d’approximation. Tandis que sur la distance moyenne entre la fonction et son approximation diminue de plus en plus.

Enfin, nous pouvons nous intéresser à la figure 4.3. Sur cette figure, nous pouvons observer l’erreur commise point par point pour les différents types de projection. On remarque que l’erreur commise avec les polynômes de Bernstein est plus importante que celle commise par projection L_2 . Toutefois, du à la taille de la constante présentée dans la section 3.3.3.1, la borne d’erreur trouvée sur les polynômes de Bernstein est bien meilleure que celle obtenue par projection L_2 .

Chapitre 5

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons donc présenté un opérateur très utile en contrôle. En effet, cet opérateur permet d'utiliser des outils de contrôle linéaires sur des dynamiques non linéaires. Le prix à payer est le passage en dimension infinie que nous devons approximer numériquement. Nous avons donc étudié la théorie de l'approximation afin de borner l'erreur obtenue lors de ce passage.

Il est évident que lors de ce mémoire, nous n'avons exploré qu'une partie de ce qu'il est possible de faire de le cadre de cette théorie. Néanmoins, nous avons déjà réussi à présenter deux bornes d'erreurs basées sur des résultats différents. Comme nous avons pu le constater, ces bornes ont des avantages et des inconvénients. Dans le cadre de la borne trouvée à partir du théorème de Deny-Lions, nous pouvons facilement travailler à partir de bornes sur le flot plutôt qu'avec une connaissance parfaite de ce dernier. Nous pouvons également noter que la variation de la taille du domaine de l'observable utilisée a une importance significative. Enfin, le principal inconvénient de cette borne est qu'il s'agit d'une borne sur l'erreur L_2 . En effet, comme nous l'avons montré, la constante utilisée dans ce mémoire est trop importante pour que l'erreur point par point puisse être bornée de manière acceptable. Une amélioration de cette constante pourrait faire l'objet de recherches ultérieures. En ce qui concerne l'erreur obtenue par projection sur des polynômes de Bernstein, celle-ci semble acceptable. Toutefois, nous nous devons de préciser plusieurs points. Premièrement, nous avons utilisé une connaissance parfaite du flot lors du calcul de cette borne. Quel impact à la constante de Lipschitz sur le taux de convergence de la borne ? Deuxièmement, les polynômes de Bernstein sont définis sur $[0, 1]$. Comment cette borne se généralise-t-elle sur un intervalle quelconque ?

Finalement, nous pouvons observer que plusieurs bornes peuvent être trouvées dans notre contexte. Dans le futur, il pourrait être intéressant de généraliser les bornes que nous avons obtenues à plus d'une dimension. Ensuite, on pourrait envisager encore d'autres types de projections que celles envisagées ici. Finalement, il serait intéressant d'effectuer une analyse comparative plus complète des différentes projections possibles. En effet, dans ce mémoire, nous avons comparé nos résultats sur le cas simple de la logistique avec une seule observable. Il reste donc beaucoup d'opportunités d'avancement sur le sujet présenté.

Bibliographie

- [1] Antonopoulou, D. C. : A note on the one-dimensional L2-projection error of smooth functions and applications to space-time finite element approximation
- [2] Berlinet, A., Thomas-Agnan, C. : Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics, Springer Science et Business Media (2011)
- [3] Novak, E., Ullrich, M., Woźniakowski, H., Zhang, S. : Reproducing kernels of Sobolev spaces on R^d and applications to embedding constants and tractability. Analysis and Applications Vol. 16, No. 05, pp. 693-715 (2018)
- [4] Carothers, N. L. : A Short Course on Approximation Theory. Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University (1998).
- [5] Cohen, A. : Theoretical, Applied and Computational Aspects of Nonlinear Approximation. Springer, Berlin, Heidelberg (2003)
- [6] Devore, R. : Nonlinear approximation. Acta Numerica, p. 51–150 (1998).
- [7] Dupont, T., Ridgway, S. : Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. Math. Comp. 34, pp 441-463 (1980)
- [8] Durán, R. G. : On Polynomial Approximation in Sobolev Spaces. SIAM Journal on Numerical Analysis Vol. 20, No. 5 , pp. 985-988 (1983)
- [9] Korda, M., Mezix, I. : Linear predictors for nonlinear dynamical systems : Koopman operator meets model predictive control. Automatica Volume 93, pp 149-160 (2018).
- [10] Laurain, P. : Compléments d'analyse : Théorie de la mesure et analyse spectrale. Institut de mathématiques de Jussieu, Paris, p. 35 (2013).
- [11] Mauroy, A. : Approximation theory applied to prediction based on the Koopman operator, Université de Namur (2019)
- [12] Mauroy, A., Susuki, Y., Mezić, I. : The Koopman Operator in Systems and Control : Theory, Numerics, and Applications. 1 ed. Springer, p. 1-30 (2019).
- [13] Mihoubi, M. : Bell polynomials and binomial type sequences. Discrete Mathematics Vol. 308, Issue 12, pp 2450-2459 (2008).
- [14] Roman, S. : The Formula of Faa Di Bruno. The American Mathematical Monthly. Vol. 87, pp 805-809 (1980).
- [15] Sendov, B. : On the theorem and constants of H. Whitney. Constr. Approx 3, 1–11 (1987).
- [16] Williams, M.O., Rowley, C.W., Kevrekidis, I.G. : A kernel-based approach to data-driven Koopman spectral analysis. Journal of Computational Dynamics 2(2), p. 247–265 (2015)